

# BILAN THERMIQUE D'UNE AILETTE DE RADIATEUR SOUMISE A UN FAIBLE ECHAUFFEMENT CINETIQUE

JEAN-JOSEPH BERNARD\* et JEANNE GENOT†

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, Chatillon-sous-Bagneux (Seine).

(Reçu le 15 Octobre 1964)

**Résumé**—Les possibilités du refroidissement par rayonnement thermique, d'un engin soumis à un échauffement interne et à un échauffement cinétique faible (vol à très haute altitude) sont examinées et étudiées théoriquement, dans le cas d'une ailette de refroidissement assimilée à une plaque rayonnante par ses deux faces soumises en outre au flux de convection.

Les résultats des calculs sur ordinateur sont présentés sous forme de graphiques à plusieurs paramètres réduits; on peut ainsi discuter les possibilités de refroidissement en fonction du dimensionnement, des températures limites imposées par la tenue des matériaux et des flux de chaleur à évacuer.

## NOTATIONS, INDICES

- $2e$ , épaisseur de l'ailette [m];  
 $l$ , longueur de l'ailette [m];  
 $L$ , hauteur de l'ailette [m];  
 $Q$ , flux de chaleur évacué par unité de section droite de l'ailette [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ ];  
 $T$ , température [ $^{\circ}\text{K}$ ];  
 $x$ , distance considérée sur la hauteur de l'ailette à compter de son extrémité;  
 $\alpha$ , coefficient de convection [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\text{degK}^{-1}$ ];  
 $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\epsilon\sigma T_*^3}$  paramètre sans dimensions;  
 $\epsilon$ , coefficient d'émissivité sans dimensions;  
 $\lambda$ , coefficient de conductibilité thermique [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\text{degK}^{-1}$ ];  
 $\theta$ , paramètre de température =  $T/T_0$ .  
 $\sigma$ , constante de Stefan-Boltzmann =  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{W}\cdot\text{m}^{-2}\text{degK}^{-4}$ .

## 1. INTRODUCTION

LE REFROIDISSEMENT externe des moteurs a été fréquemment assuré par des ailettes, soudées sur la paroi à refroidir, destinées à augmenter la surface de convection avec l'air ambiant. Dans le cas des vols à grande vitesse, l'échauffement ciné-

tique inverse cet effet de refroidissement mais, dans les hautes altitudes, les coefficients de convection deviennent faibles et le rayonnement des ailettes peut être suffisant pour limiter les températures de paroi d'un véhicule ou d'un engin aux valeurs tolérées par les matériaux modernes.

Cette possibilité est étudiée ici sur la forme schématique d'une plaque rectangulaire d'épaisseur constante  $2e$  négligeable devant la hauteur  $L$  et la largeur  $l$ .

## 2. HYPOTHESES THERMO-AERODYNAMIQUES

L'ailette reçoit de la chaleur par sa base où le contact avec le corps de l'avion ou de l'engin est supposé parfait. Selon les cas, la donnée thermique est une température fixe  $T_1$  à maintenir à la base, ou un flux de chaleur  $Q$  à évacuer.

Chaque ailette est étudiée isolément, les rayonnements mutuels entre les ailettes ou entre la surface de base et les ailettes ne sont pas pris en compte; le rayonnement solaire est négligé également.

Le coefficient de convection  $\alpha$  du fluide extérieur est supposé constant sur les deux faces de la plaque ainsi que la température de paroi athermane  $T_*$ . En désignant par  $T$  la température locale de la surface on a donc en chaque point le flux convectif  $\alpha(T_* - T)$ .

Le flux de chaleur évacué par le rayonnement

\* Collège Scientifique Universitaire, Le Mans.

† Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, Chatillon-sous-Bagneux.

des surfaces s'exprime en chaque point par  $\epsilon\sigma T^4$ ,  $\epsilon$  étant le coefficient d'émissivité, supposé constant, de la surface et  $\sigma$  la constante de Stéfan.

des conditions (3) puisqu'on ne connaît pas simultanément  $Q$  et  $T_1$ .

Une deuxième intégration donne immédiatement la solution

$$x = \int_{T_0}^T \frac{dT}{\sqrt{\left[ \frac{2\epsilon\sigma}{5\lambda e} (T^5 - T_0^5) + \frac{\alpha}{\lambda e} (T^2 - T_0^2) - \frac{2\alpha T_*}{\lambda e} (T - T_0) \right]}} \quad (4)$$

qui permet de définir la constante  $T_0$ :

—dans le cas de la condition de température  $(T)_{x=L} = T_1$ , par l'unique relation implicite

$$L = \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{\sqrt{\left[ \frac{2\epsilon\sigma}{5\lambda e} (T^5 - T_0^5) + \frac{\alpha}{\lambda e} (T^2 - T_0^2) - \frac{2\alpha T_*}{\lambda e} (T - T_0) \right]}} \quad (5)$$

Le bilan thermique se traduit, en régime permanent, par l'équation différentielle suivante entre les échanges par conduction d'une part et les flux de rayonnement et de convection d'autre part:

$$\lambda e \frac{d^2T}{dx^2} = \epsilon\sigma T^4 - \alpha (T_* - T) \quad (1)$$

Chaque section droite définie par sa distance  $x$  à l'extrémité libre de l'ailette est supposée isotherme. Les conditions aux limites sont alors:

$$\text{—à l'extrémité libre } \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad (2)$$

$$\text{—à la base } (T)_{x=L} = T_1 \text{ ou } \lambda \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = Q \quad (3)$$

selon qu'on impose la température ou le flux;  $\lambda$  désigne la conductibilité thermique du matériau, supposée constante.

### 3. SOLUTION ANALYTIQUE

Une première intégration par rapport à  $T$ , donne, compte tenu de la condition aux limites (2):

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 = \frac{\epsilon\sigma}{5\lambda e} (T^5 - T_0^5) + \frac{\alpha}{2\lambda e} (T^2 - T_0^2) - \frac{\alpha T_*}{\lambda e} (T - T_0);$$

la constante d'intégration  $T_0$ , valeur de  $T$  pour  $x = 0$ , ne peut être encore déterminée par l'une

—dans le cas de la condition de flux  $\lambda (dT/dx)_{x=L} = Q$ , par la relation (5) qui, jointe à la condition

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\lambda^2} = \frac{\epsilon\sigma}{5\lambda e} (T_1^5 - T_0^5) + \frac{\alpha}{\lambda e} (T_1^2 - T_0^2) - \frac{2\alpha T_*}{\lambda e} (T_1 - T_0) \quad (6)$$

définit à la fois les températures  $T_0$  et  $T_1$ .

Pour faciliter les calculs numériques, on a introduit les paramètres réduits suivants:

$$\theta = \frac{T}{T_0}; \quad \theta_1 = \frac{T_1}{T_0}; \quad \theta_* = \frac{T_*}{T_0}; \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\epsilon\sigma T_*^3}$$

et c'est l'intégrale

$$\mathcal{I}(\theta) = \int_1^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{[(\theta^5 - 1) + (5/2) \bar{\alpha} \theta^3 (\theta^2 - 1) - 5\bar{\alpha} \theta^4 (\theta - 1)]}} \quad (7)$$

qui a été tabulée.

### 4. DISCUSSION

La solution (7) n'a de sens que si le polynôme

$$\varphi(\theta) = (\theta^5 - 1) + (5/2) \bar{\alpha} \theta^3 (\theta^2 - 1) - 5\bar{\alpha} \theta^4 (\theta - 1) \quad (8)$$

est positif et sans racines doubles pour  $\theta \geq 1$ . Le

domaine étudié ici étant  $1 \leq \theta \leq \theta_*$ , ces deux conditions s'expriment par la seule inégalité

$$1 + \bar{\alpha}\theta_*^3 - \bar{\alpha}\theta_*^4 > 0 \quad (9)$$

car la dérivée  $\varphi'(\theta)$ , croissante pour  $\theta > 1$  est alors partout positive et non nulle; la relation (9) s'écrit avec les variables physiques

$$\epsilon\sigma T_0^4 > \alpha(T_* - T_0),$$

c'est la condition nécessaire et suffisante pour que le rayonnement l'emporte sur la convection en tout point de la plaque.

5. CALCULS NUMERIQUES

Le calcul numérique de l'intégrale  $\mathcal{J}(\theta_1)$  a été effectué sur ordinateur pour des valeurs de  $\theta_* = T_*/T_0$  comprises entre 3 et 7 car ce paramètre est inconnu a priori,  $T_*$  et  $\bar{\alpha}$  étant seule connus avec la mission de l'engin.

L'intégrale  $\mathcal{J}(\theta_1)$  et la fonction  $\varphi(\theta_1)$  sont liées respectivement à la longueur  $L$  de l'ailette et au flux thermique  $Q$  évacué de la paroi par les relations

$$\mathcal{J}(\theta_1) = L \sqrt{\left(\frac{2\epsilon\sigma T_0^3}{5\lambda e}\right)},$$

$$\varphi(\theta_1) = Q^2 \frac{5e}{2\lambda\epsilon\sigma T_0^5};$$

mais il est préférable de faire apparaître au second membre la température  $T_1$  au lieu de  $T_0$  bien que l'une et l'autre soient inconnues a priori car, en général, on connaît au moins une limite supérieure tolérée pour la température  $T_1$  de la paroi.

Les résultats des calculs numériques sont ainsi présentés sous forme de graphiques sur lesquels sont portées en abscisse et en ordonnées les expressions

$$X = \theta_1^{-5/2} \sqrt{\varphi(\theta_1)} = Q \sqrt{\left(\frac{5e}{2\lambda\epsilon\sigma T_1^5}\right)}$$

$$Y = \theta_1^{3/2} \mathcal{J}(\theta_1) = L \sqrt{\left(\frac{2\epsilon\sigma T_1^3}{5\lambda e}\right)}$$

qui sont des fonctions de  $\theta_1 = T_1/T_0$ , de  $\theta_* = T_*/T_0$  et de  $\alpha$ .

6. EXPLOITATION DES RESULTATS

Une première série de planches, dont un exemple est donné par la Fig. 1, représente, pour

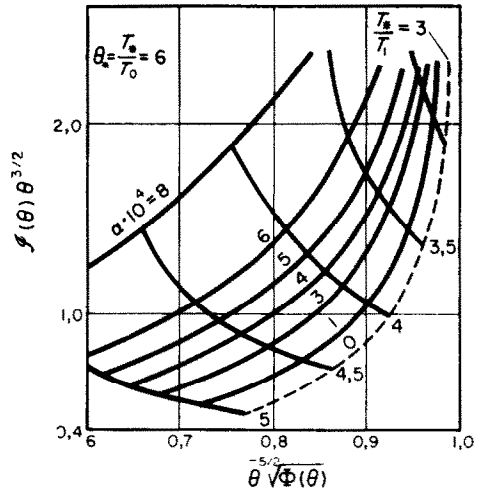


FIG. 1.

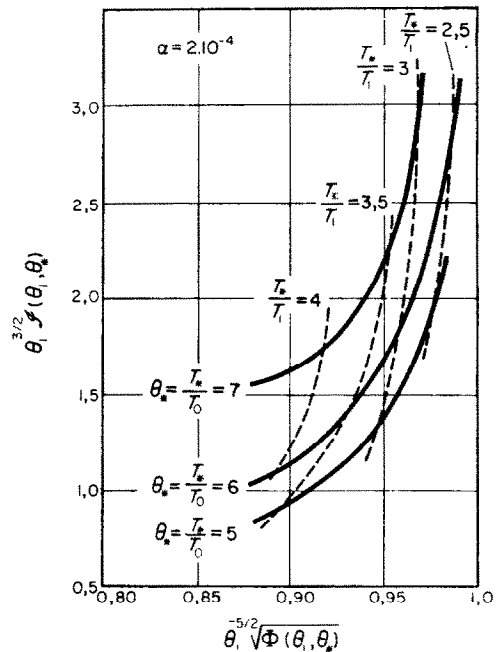


FIG. 2.

chaque valeur de  $\theta_*$ , les deux familles de courbes  $(X, Y)$  correspondant à  $T_*/T_1$  constant et à  $\alpha$  constant. L'exploitation de ces courbes est très simple quand la température  $T_1$  est fixée: la longueur  $L$  et le flux  $Q$  seront alors immédiatement déterminés en fonction de  $\theta_*$  par le point

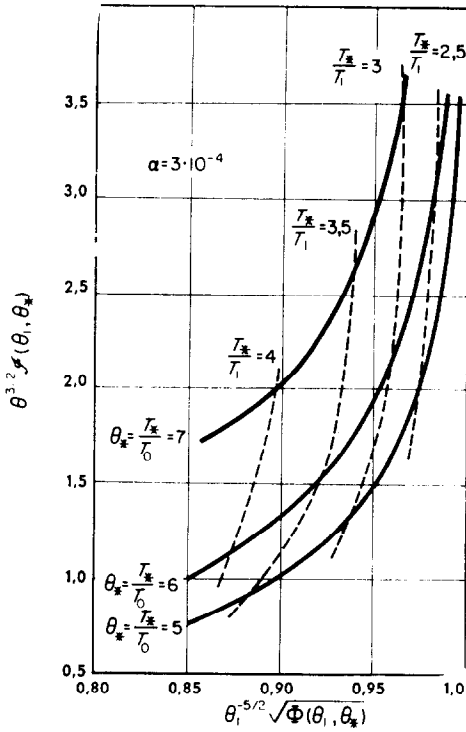


FIG. 3.

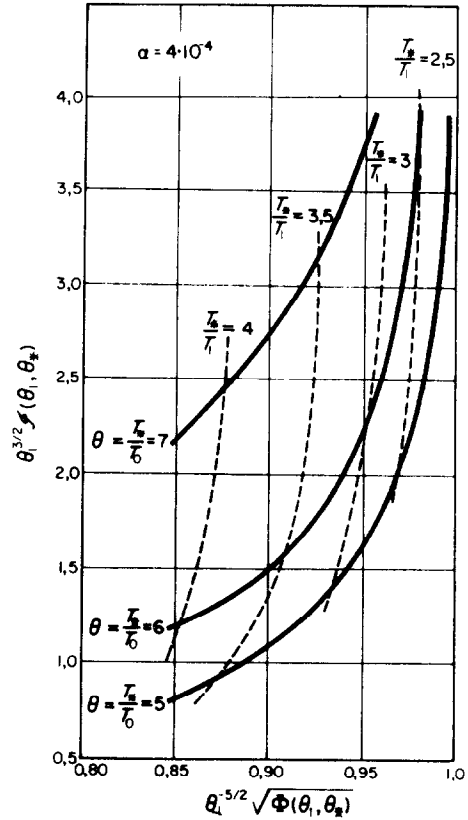


FIG. 4.

d'intersection des deux courbes correspondant aux valeurs connues de  $\alpha$  et  $T_*/T_1$ .

Dans le cas où le flux à évacuer est imposé, il est avantageux de représenter (Figs. 2, 3 et 4), pour chaque valeur de  $\alpha$ , les courbes correspondant à  $T_*/T_1$  constant et à  $T_*/T_0$  constant, ce qui permet de déterminer rapidement la longueur d'ailette nécessaire et les températures  $T_0$  et  $T_1$  atteintes en ses extrémités.

Pour une vitesse de vol de  $4000 \text{ m.s}^{-1}$ , à une altitude de  $90000 \text{ m}$ , la température  $T_*$  est de l'ordre de  $3500^\circ\text{K}$  [1] et le coefficient de convection  $\alpha = 3.10^{-4}$  [2], le point de la Fig. 3 correspondant à  $T_1 = 1000^\circ\text{K}$  ( $T_*/T_1 \neq 3,5$ ) et  $T_0 = 500^\circ\text{K}$  ( $T_*/T_0 \neq 7$ ) a pour coordonnées  $X = 0,937$  et  $Y = 2,56$  de qui donne par exemple, pour une ailette en acier inoxydable ( $\lambda = 20$ ) de  $1 \text{ mm}$  d'épaisseur et d'émissivité  $\epsilon = 1$  une longueur  $L = 0,054 \text{ m}$  et un flux  $Q$  évacué par unité de largeur d'ailette égal à  $892\text{W}$ .

## 7. CONCLUSION

Les graphiques présentés permettent d'étudier le refroidissement d'un engin par ailettes en présence d'une convection faible dans les deux cas suivants:

- 1°/ Quand on se donne le flux à évacuer et on calcule alors la longueur de l'ailette et la température de la paroi;
- 1°/ Quand on se donne la température de paroi, comme cela se présente lors de l'utilisation d'une circulation de métal liquide; on calcule dans ce cas la longueur de l'ailette et la quantité de chaleur qui peut être évacuée.

## BIBLIOGRAPHIE

1. SAUL FELDMAN, Hypersonic gas dynamic charts for equilibrium air, Avco Research Laboratory (1957).
2. HEINZ HERMANN KOELLE (Editor), *Handbook of Astronautical Engineering*. McGraw Hill, New York. (1961).

**Abstract**—The possibilities of cooling, by thermal radiation, a missile subject to internal heat generation and a small amount of frictional heating (i.e. in flight at very high altitudes) are investigated; they are studied theoretically for the case of a cooling fin idealized by a radiating plate with two faces which are also subject to convective heating.

The results of numerical calculations are presented in the form of graphs with several dimensionless parameters; this permits a discussion of the feasibility of cooling in terms of the size, the temperature limits imposed by the strength of the material and the rate at which heat must be removed.

**Zusammenfassung**—Es werden Möglichkeiten erforscht, durch Wärmeabstrahlung ein Geschoss zu kühlen, das innerer Wärmeerzeugung und einem kleinen Betrag Reibungswärme unterliegt. (d.h. beim Flug in sehr grossen Höhen.) Sie werden für den Fall einer Kühlrippe, die durch eine zweiseitig strahlende und auch konvektiv beheizte Platte verkörpert wird, theoretisch untersucht.

Die Ergebnisse der numerischen Berechnungen werden in Form von Diagrammen für mehrere dimensionslose Parameter angegeben. Damit können die Möglichkeiten der Kühlung als Funktion der Dimensionierung, der durch die Materialstärke festgelegten Temperaturgrenzen und des abzuführenden Wärmestromes diskutiert werden.

**Аннотация**—Исследуются возможности охлаждения теплоизлучением снаряда при наличии внутреннего выделения тепла, а также небольшого количества тепла, выделяющегося за счет трения (т.е. при полете на очень большой высоте). Исследования проводились теоретически для охлаждающего ребра, идеализированный случай которого представлен излучающей пластинкой с двумя поверхностями, также подверженными конвективному нагреву.

Результаты численных расчетов представлены в виде графиков с несколькими безразмерными параметрами. Это позволяет рассматривать возможность охлаждения с учетом размера, температурных пределов, налагаемых прочностью материала, а также скорости отвода тепла.